

# Remarques élémentaires sur la fonction de Möbius

Michel Balazard

Le texte qui suit est une version détaillée de l'article « Элементарные замечания о функции Мёбиуса », paru aux Труды Математического Института им. В.А. Стеклова **276** (2012), p.39-45 (voir [3] pour une traduction en langue anglaise).

*À la mémoire d'A. A. Karatsuba, pour le 75<sup>e</sup> anniversaire de sa naissance.*

## 1 L'inversion de Möbius

En 1832, Möbius a défini la fonction arithmétique (qui porte maintenant son nom)

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers deux à deux distincts;} \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier} \end{cases}$$

(cf. [15]). La notation  $\mu$  est due à Mertens (cf. [14])<sup>\*</sup>.

La propriété fondamentale de la fonction de Möbius, l'*inversion de Möbius*, consiste en ceci. Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $]0, \infty[$  et nulles sur  $]0, 1[$ . On pose pour  $\varphi \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} S_1\varphi(x) &= \sum_{n \geq 1} \varphi(x/n), \\ S_\mu\varphi(x) &= \sum_{n \geq 1} \mu(n)\varphi(x/n) \quad (x > 0), \end{aligned}$$

où les sommes ne portent en fait que sur les  $n \leq x$ , par définition de  $\mathcal{F}$ . Alors  $S_1$  et  $S_\mu$  sont des applications linéaires de  $\mathcal{F}$  dans lui-même, inverses l'une de l'autre :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n \geq 1} \mu(n)S_1\varphi(x/n) \\ \varphi(x) &= \sum_{n \geq 1} S_\mu\varphi(x/n) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

J'appelle *transformation de Riemann* l'application  $S_1$  et *transformation de Möbius* l'application  $S_\mu$ . Le nom de Riemann s'impose puisqu'en posant  $h = 1/x$  et  $\omega(t) = \varphi(1/t)$  on voit que  $x^{-1}S_1\varphi(x) =$

---

<sup>\*</sup>. Pour avoir une vue d'ensemble de l'histoire de la fonction de Möbius au XIX<sup>e</sup> siècle, il faut consulter l'indispensable ouvrage de Dickson [4], chapitre XIX.

$h \sum_n \omega(nh)$  est une somme de Riemann de pas  $h$  pour la fonction  $\omega$ ; d'autre part, en calculant<sup>†</sup>  $S_1\varphi$  pour  $\varphi(x) = x^s$  ( $s > 1$ ), on obtient

$$S_1\varphi(x) = x^s \sum_n \frac{1}{n^s} = x^s \zeta(s),$$

où  $\zeta$  est la fonction de Riemann.

## 2 Une identité de Meissel et une inégalité de Gram

L'application la plus simple de l'inversion de Möbius consiste à prendre<sup>‡</sup>  $\varphi(x) = [x \geq 1]$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} S_1\varphi(x) &= \sum_{n \leq x} 1 \\ &= [x] \\ &= x - \{x\}, \end{aligned}$$

où  $[x]$  et  $\{x\}$  désignent respectivement la partie entière et la partie fractionnaire du nombre réel  $x$ . On obtient donc la formule de Meissel (1854, cf. [13], p.303) :

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) [x/n] = 1 \quad (x \geq 1). \quad (1)$$

Cette identité a été exploitée par Gram en 1884 (cf. [6], p.197-198) pour démontrer le premier résultat non trivial sur la série  $\sum \mu(n)/n$ , à savoir que ses sommes partielles sont bornées :

$$m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \in [-1, 1] \quad (x \geq 1).$$

Rappelons la démonstration, très simple. Il suffit de traiter le cas de  $x$  entier. On a alors

$$\begin{aligned} xm(x) &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \frac{x}{n} \\ &= \sum_{n \leq x} \mu(n) [x/n] + \sum_{n \leq x} \mu(n) \{x/n\} \\ &= 1 + \sum_{n \leq x} \mu(n) \{x/n\} \\ &\in [2 - x, x] \end{aligned} \quad (2)$$

puisque  $|\mu(n)\{x/n\}| \leq 1$  et  $\{x/x\} = 0$ .

---

<sup>†</sup>. On s'autorise ici une fonction  $\varphi$  non nulle sur  $]0, 1[$ , mais menant à une série  $S_1\varphi(x)$  absolument convergente. D'ailleurs, on peut considérer  $S_1$  et  $S_\mu$  sur d'autres espaces que  $\mathcal{F}$ , comme l'espace des fonctions nulles au voisinage de 0, ou l'espace des fonctions qui sont  $O(x^\alpha)$  au voisinage de 0 (avec  $\alpha > 1$ ).

<sup>‡</sup>. J'utilise la notation d'Iverson :  $[A] = 1$  si la proposition  $A$  est vraie, et  $[A] = 0$  si elle est fausse.

### 3 Une identité de MacLeod faisant intervenir les polynômes de Bernoulli

MacLeod a donné dans [11] une généralisation de la formule de Meissel en termes des polynômes de Bernoulli  $b_k$ , définis par l'identité formelle

$$\frac{z}{e^z - 1} e^{zX} = \sum_{k \geq 0} b_k(X) \frac{z^k}{k!}.$$

On a

$$\begin{aligned} b_0(X) &= 1 \\ b_1(X) &= X - \frac{1}{2} \\ b_2(X) &= X^2 - X + \frac{1}{6} \\ b_3(X) &= X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{X}{2} \\ b_4(X) &= X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30} \\ b_5(X) &= X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{X}{6} \\ b_6(X) &= X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42} \\ b_7(X) &= X^7 - \frac{7}{2}X^6 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{6}X^3 + \frac{1}{6}X \\ b_8(X) &= X^8 - 4X^7 + \frac{14}{3}X^6 - \frac{7}{3}X^4 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

etc.

Plus généralement,

$$b_k(X) = \sum_{j=0}^k B_j \binom{k}{j} X^{k-j},$$

où  $B_j = b_j(0)$  est le  $j^{\text{e}}$  nombre de Bernoulli. Rappelons que  $B_j = 0$  si  $j$  est impair et supérieur à 1 (voir par exemple [5], §6.5).

La suite des  $b_k$  vérifie de nombreuses identités, en particulier celle-ci :

$$b_k(X+1) - b_k(X) = kX^{k-1}. \quad (3)$$

Pour  $k$  entier positif et  $x$  réel positif, posons

$$B_k(x) = b_k(\{x\}),$$

et

$$\varphi_k(x) = \frac{b_k(x) - B_k(x)}{x^{k-1}}.$$

Les fonctions  $\varphi_k$  appartiennent à  $\mathcal{F}$ . On a

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x - \{x\} = \lfloor x \rfloor \\
\varphi_2(x) &= x - 1 - \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{x} \\
\varphi_3(x) &= x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{\{x\}^3 - \frac{3}{2}\{x\}^2 + \frac{1}{2}\{x\}}{x^2} \\
\varphi_4(x) &= x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2}{x^3} \\
\varphi_5(x) &= x - \frac{5}{2} + \frac{5}{3x} - \frac{1}{6x^3} - \frac{\{x\}^5 - \frac{5}{2}\{x\}^4 + \frac{5}{3}\{x\}^3 - \frac{1}{6}\{x\}}{x^4} \\
\varphi_6(x) &= x - 3 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x^3} - \frac{\{x\}^6 - 3\{x\}^5 + \frac{5}{2}\{x\}^4 - \frac{1}{2}\{x\}^2}{x^5} \\
\varphi_7(x) &= x - \frac{7}{2} + \frac{7}{2x} - \frac{7}{6x^3} + \frac{1}{6x^5} - \frac{\{x\}^7 - \frac{7}{2}\{x\}^6 + \frac{7}{2}\{x\}^5 - \frac{7}{6}\{x\}^3 + \frac{1}{6}\{x\}}{x^6} \\
\varphi_8(x) &= x - 4 + \frac{14}{3x} - \frac{7}{3x^3} + \frac{2}{3x^5} - \frac{\{x\}^8 - 4\{x\}^7 + \frac{14}{3}\{x\}^6 - \frac{7}{3}\{x\}^4 + \frac{2}{3}\{x\}^2}{x^7},
\end{aligned}$$

etc.

Plus généralement,

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} B_j \binom{k}{j} x^{1-j} - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} B_j \binom{k}{j} \{x\}^{k-j}}{x^{k-1}}. \quad (4)$$

La proposition suivante est due à MacLeod. La formulation et la démonstration que j'en donne ici sont différentes de celles de [11].

**Proposition 1 (MacLeod, 1994)** *Pour  $k$  entier positif et  $x \geq 1$ , on a*

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \varphi_k(x/n) = k(1 - 1/x)^{k-1}.$$

### Démonstration

Par inversion de Möbius, il s'agit de montrer que  $\varphi_k(x)$  est la transformée de Riemann de la fonction  $k(1 - 1/x)^{k-1} [x \geq 1]$ .

Effectivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} k(1 - n/x)^{k-1} &= x^{1-k} \sum_{n \leq x} k(x - n)^{k-1} \\
&= x^{1-k} \sum_{n \leq x} (b_k(x - n + 1) - b_k(x - n)) \quad (\text{en vertu de (3)}) \\
&= x^{1-k} (b_k(x - 1 + 1) - b_k(x - \lfloor x \rfloor)) \quad (\text{somme télescopique}) \\
&= x^{1-k} (b_k(x) - b_k(\{x\})) \\
&= \varphi_k(x).
\end{aligned}$$

□

Terminons ce paragraphe avec quelques observations sur les fonctions  $\varphi_k$ . On a d'abord

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) &= \frac{b_k(x) - b_k(\{x\})}{x^{k-1}} \\ &= kx^{1-k} \sum_{n \leq x} (x-n)^{k-1},\end{aligned}$$

où la deuxième égalité a été vue lors de la démonstration de la proposition 1.

Rappelons que les *moyennes intégrales de Cesàro*<sup>§</sup> d'une fonction arithmétique  $f$  sont définies par la formule

$$F_k(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \frac{(x-n)^k}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}, x > 0).$$

Ainsi,  $F_0$  est la fonction sommatoire de  $f$  et

$$F_{k+1}(x) = \int_0^x F_k(t) dt.$$

On voit donc que  $x^{k-1}\varphi_k(x)/k!$  est la  $(k-1)^e$  moyenne intégrale de Cesàro de la fonction arithmétique constante égale à 1. En particulier, on a l'identité

$$\frac{x^k \varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!} = \int_0^x t^{k-1} \frac{\varphi_k(t)}{k!} dt,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{k+1}(x) = (k+1)x^{-k} \int_0^x t^{k-1} \varphi_k(t) dt.$$

On a donc aussi

$$\frac{d}{dx}(x^k \varphi_{k+1}(x)) = (k+1)x^{k-1} \varphi_k(x).$$

Le comportement de la fonction  $\varphi_k$  aux voisinages de 1 et de l'infini est donné en première approximation par

$$\varphi_k(x) \sim k(x-1)^{k-1} \quad (x \rightarrow 1) \quad \text{et} \quad \varphi_k(x) = x - k/2 + O(1/x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Enfin, voici une identité qui nous sera utile dans les applications de (7) :

$$\int_1^\infty B_k(t) \frac{dt}{t^{k+1}} = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{B_j}{j} - \gamma, \tag{5}$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler. Cette identité se démontre par intégrations par parties successives à partir du cas  $k=1$  (voir aussi [10], Theorem 2.2).

---

§. Hardy, dans [7], §5.14, définit les moyennes intégrales de Cesàro d'une *fonction de variable réelle*  $a(t)$  par  $A_0(x) = \int_0^x a(t)dt$  et  $A_k(x) = \int_0^x A_{k-1}(t)dt$ . Cette définition se généralise en remplaçant  $a(t)dt$  par une *mesure* borélienne quelconque (finie sur les segments), et les moyennes dont nous parlons sont alors celles de la mesure  $\sum_n f(n)\delta_n$ , classiquement associée à la fonction arithmétique  $f$ .

## 4 Une identité générale

Soit  $f$  une fonction arithmétique,  $F$  sa fonction sommatoire, et  $\varphi : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction absolument continue sur tout segment, s'annulant au point 1. Dans la suite, je ferai plusieurs fois usage de l'identité

$$\begin{aligned} S_f \varphi(x) &= \sum_{n \leq x} f(n) \varphi(x/n) = \sum_{n \leq x} f(n) \int_1^{x/n} \varphi'(t) dt \\ &= \int_1^x F(x/t) \varphi'(t) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

où l'on a interverti sommation et intégration pour obtenir la dernière égalité.

En particulier, en supposant

$$\alpha = \limsup_{x \rightarrow \infty} x^{-1} |F(x)| < \infty,$$

on a

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^{-1} |S_f \varphi(x)| \leq \alpha \int_1^\infty |\varphi'(t)| \frac{dt}{t},$$

pourvu que cette dernière intégrale soit convergente. Si en outre  $\varphi' \geq 0$ , cela donne

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^{-1} |S_f \varphi(x)| \leq \alpha \int_1^\infty \varphi'(t) \frac{dt}{t} = \alpha \int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t^2}. \quad (7)$$

## 5 Le cas $k = 2$ de l'identité de Macleod

Le cas  $k = 1$  de la proposition 1 est la formule de Meissel (1). Examinons maintenant le cas  $k = 2$  :

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left( \frac{x}{n} - 1 - \frac{\{x/n\}^2 - \{x/n\}}{x/n} \right) = 2 - \frac{2}{x} \quad (x \geq 1). \quad (8)$$

Notons suivant l'usage

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

la fonction sommatoire ordinaire de la fonction de Möbius (la fonction  $m(x)$  est sa fonction sommatoire *logarithmique*). Posons également pour  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \int_1^x M(t) \frac{dt}{t^2} \\ &= \frac{1}{x} \int_1^x m(t) dt \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= m(x) - \frac{M(x)}{x} \\ &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

ces identités étant d'ailleurs valables généralement, en y remplaçant  $\mu$  par n'importe quelle autre fonction.

En appliquant (6), on peut réécrire (8) sous la forme

$$\begin{aligned} xm_1(x) &= 2 - \frac{2}{x} + \sum_{n \leq x} \mu(n) \frac{\{x/n\}^2 - \{x/n\}}{x/n} \\ &= 2 - \frac{2}{x} + \int_1^x M(x/t) \frac{(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2}{t^2} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

**Proposition 2** *Pour  $t \geq 0$ , on a*

$$|(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2| \leq t.$$

**Démonstration**

On a d'abord

$$(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2 \geq -t.$$

Ensuite,

$$(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2 - t = (\{t\} - 1)(2t - \{t\}) \leq 0. \quad \square$$

La conjonction de (11) et de la proposition 2 fournit le résultat suivant.

**Proposition 3** *Pour  $x \geq 1$ , on a*

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

**Démonstration**

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_1^x M(x/t) \frac{(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2}{t^2} dt \right| &\leq \int_1^x |M(x/t)| \frac{dt}{t} \quad (\text{d'après la proposition 2}) \\ &= \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad \square$$

En particulier, en posant

$$\alpha = \limsup_{x \rightarrow \infty} |M(x)/x|,$$

on obtient

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |m_1(x)| \leq \alpha$$

et donc

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |m(x)| \leq 2\alpha. \quad (12)$$

## 6 Le lemme d'Axer

La première démonstration de l'implication

$$M(x) = o(x) \Rightarrow m(x) = o(1) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (13)$$

par les méthodes de l'analyse réelle<sup>¶</sup> fut obtenue par Axer en 1910 (cf. [1]) ; c'est encore de nos jours celle qui est présentée dans les manuels de théorie analytique des nombres. Le raisonnement présenté au §4 constitue une autre démonstration de ce résultat ; il présente en outre un avantage quantitatif sur celui d'Axer, comme nous allons le voir maintenant.

Le lemme fondamental utilisé par Axer est le suivant.

**Proposition 4 (Axer, 1910)** *Soit  $f$  une fonction arithmétique,*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n \leq x} |f(n)|.$$

*On suppose que*

$$F(x) = o(x) \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{et} \quad G(x) = O(x) \quad (x \geq 1).$$

*Alors*

$$\sum_{n \leq x} f(n) \{x/n\} = o(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

La conjonction de la formule de Meissel sous la forme (2) et du lemme d'Axer fournit bien l'implication (13).

La lecture de la démonstration d'Axer, ou des démonstrations ultérieures de Landau, en révèle des variantes quantitatives, comme la suivante (cf. [9], p.132-134).

**Proposition 5 (Landau, 1910)** *Soit  $f$  une fonction arithmétique,*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n \leq x} |f(n)|.$$

*On suppose que*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |F(x)/x| \leq \alpha \leq 1/2 \quad \text{et} \quad |G(x)| \leq Ax \quad (x \geq 1).$$

*Alors*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \left| x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n) \{x/n\} \right| \leq \alpha(A + 5 + 2 \log(1/\alpha)).$$

Nous verrons au §10 que la présence du terme  $\alpha \log(1/\alpha)$  est inévitable à ce degré de généralité. Pour  $0 < \alpha \leq 1/2$ , l'application de cette version quantitative du lemme d'Axer donne

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |m(x)| \ll \alpha \log(1/\alpha)$$

au lieu de (12).

---

<sup>¶</sup>. La démonstration de  $m(x) = o(1)$  par les méthodes de l'analyse complexe fut obtenue dès 1897 par von Mangoldt (cf. [12]) et ce résultat implique immédiatement que  $M(x) = o(x)$ , d'après un théorème général de Kronecker sur les séries convergentes (cf. [8]), ou bien par l'égalité de (9) et (10).



## 7 Application des cas $k = 3$ et $k = 4$ de l'identité de MacLeod

En passant maintenant à  $k = 3$ , la proposition 1 nous donne

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left( \frac{x}{n} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x/n} - \frac{\{x/n\}^3 - \frac{3}{2}\{x/n\}^2 + \frac{1}{2}\{x/n\}}{(x/n)^2} \right) = 3(1 - 1/x)^2 \quad (x \geq 1).$$

On peut à partir de cette identité démontrer la proposition 7 ci-dessous (avec 3 au lieu de  $8/3$ ). Je préfère cependant utiliser la fonction suivante, découverte après quelques essais <sup>||</sup>.

$$\frac{4}{3}\varphi_3(x) - \frac{1}{3}\varphi_4(x) = x - 1 - \varepsilon_1(x),$$

où

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3x} + \frac{4}{3} \frac{\{x\}^3 - \frac{3}{2}\{x\}^2 + \frac{1}{2}\{x\}}{x^2} - \frac{1}{3} \frac{\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2}{x^3}.$$

La fonction  $\varepsilon_1$  vérifie une identité remarquable.

**Proposition 6** *Pour  $x > 0$ , on a  $\varepsilon'_1(x) = (1 - \varphi'_2(x))^2$ .*

**Démonstration**

En effet,

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1(x) &= \frac{1}{3x^2} + 4 \frac{\{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}}{x^2} - \frac{8}{3} \frac{\{x\}^3 - \frac{3}{2}\{x\}^2 + \frac{1}{2}\{x\}}{x^3} - \frac{4}{3} \frac{\{x\}^3 - \frac{3}{2}\{x\}^2 + \frac{1}{2}\{x\}}{x^3} + \frac{\{x\}^4 - 2\{x\}^3 + \{x\}^2}{x^4} \\ &= \frac{(2\{x\} - 1)^2}{x^2} - 2 \frac{\{x\}(\{x\} - 1)(2\{x\} - 1)}{x^3} + \frac{\{x\}^2(\{x\} - 1)^2}{x^4} \\ &= \left( \frac{(2\{x\} - 1)x - \{x\}(\{x\} - 1)}{x^2} \right)^2 \\ &= (1 - \varphi'_2(x))^2. \end{aligned}$$

□

La proposition 6 peut se récrire sous la forme

$$3 - 4\varphi'_3 + \varphi'_4 = 3(1 - \varphi'_2)^2.$$

Observons que la fonction  $\varphi'_2$  a une discontinuité en chaque entier, mais que  $(1 - \varphi'_2)^2$  est continue.

**Proposition 7** *Pour  $x \geq 1$ , on a*

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^x |M(t)| dt + 8/3x.$$

**Démonstration**

---

<sup>||</sup>. Pour les expériences numériques effectuées lors de la préparation de cet article, j'ai utilisé le logiciel Maple, version 9.5.

On a

$$\begin{aligned}
xm_1(x) &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \left( \frac{x}{n} - 1 \right) \\
&= \sum_{n \leq x} \mu(n) \left( \frac{4}{3} \varphi_3(x/n) - \frac{1}{3} \varphi_4(x/n) \right) + \sum_{n \leq x} \mu(n) \varepsilon_1(x/n) \\
&= \frac{4}{3} \cdot 3(1 - 1/x)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4(1 - 1/x)^3 + \int_1^x M(x/t) \varepsilon_1'(t) dt,
\end{aligned}$$

d'après la proposition 1 et l'identité (6).

On montre d'une part facilement que

$$0 \leq \frac{4}{3} \cdot 3(1 - 1/x)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4(1 - 1/x)^3 \leq \frac{8}{3} \quad (x \geq 1).$$

D'autre part, les propositions 2 et 6 entraînent que  $0 \leq \varepsilon_1'(t) \leq t^{-2}$ . Le résultat en découle.  $\square$

En particulier, on déduit de la proposition 7 que

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |m_1(x)| \leq \frac{1}{2} \limsup_{x \rightarrow \infty} |M(x)/x|. \quad ** \quad (14)$$

Cela étant, d'après la proposition 6,  $\varepsilon_1'(x)$  est positif ou nul. Les relations (7) et (5) montrent alors qu'on peut remplacer la constante  $\frac{1}{2}$  de (14) par

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \varepsilon_1(t) \frac{dt}{t^2} &= \int_1^\infty \left( \frac{1}{3t^2} - \frac{1}{3t^3} + \frac{4}{3} \frac{B_3(t)}{t^4} - \frac{1}{3} \frac{B_4(t)}{t^5} \right) dt \\
&= \frac{271}{360} - \gamma = 0,1755\dots
\end{aligned}$$

## 8 Généralisation des propositions 3 et 7

Je donne maintenant une proposition générale, évidente pour  $k = 1$ , et dont les propositions 3 et 7 explicitent les cas particuliers  $k = 2$  et  $k = 3$ .

**Proposition 8** *Pour tout nombre entier  $k$ , il existe deux constantes positives  $C_k$  et  $D_k$  telles que*

$$|m_1(x)| \leq C_k x^{1-k} \int_1^x |M(t)| t^{k-3} dt + D_k/x \quad (x > 0).$$

### Démonstration

Comme  $m_1(x) = 0$  si  $0 < x < 1$ , on peut supposer  $x \geq 1$ . Observons d'abord que le résultat pour une valeur particulière de  $k$  entraîne le résultat pour toutes les valeurs inférieures (avec les mêmes constantes  $C_k$  et  $D_k$ ) puisque pour  $j \leq k$ ,

$$x^{-k} t^{k-2} \leq x^{-j} t^{j-2} \quad (1 \leq t \leq x).$$

---

\*\*. Bien entendu, on sait depuis 1897 que ces deux limites sont nulles, mais la démonstration que nous venons de donner de cette inégalité ne dépend pas de ce fait.

On peut donc supposer  $k$  entier, impair et supérieur ou égal à 5, disons. Avec un léger changement de notation, nous allons donc montrer que, pour  $k$  entier supérieur ou égal à 2,

$$|m_1(x)| \ll_k x^{-2k} \int_1^x |M(t)| t^{2k-2} dt + x^{-1} \quad (x \geq 1). \quad (15)$$

Pour cela, nous considérons la fonction

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_{2k+1} + \lambda_2 \varphi_{2k+2} + \cdots + \lambda_k \varphi_{3k},$$

avec des coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  convenables.

On a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \varphi_{2k+\ell}(x) \\ &= \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \left( x - \frac{1}{2} \binom{2k+\ell}{1} + \sum_{i=1}^{k-1} B_{2i} \binom{2k+\ell}{2i} x^{1-2i} \right) + \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \sum_{i=k}^{k+\lfloor(\ell-1)/2\rfloor} B_{2i} \binom{2k+\ell}{2i} x^{1-2i} - \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \frac{B_{2k+\ell}(x) - B_{2k+\ell}}{x^{2k+\ell-1}}, \end{aligned}$$

où l'on a séparé les termes correspondant à  $j = 0$ ,  $j = 1$ ,  $j = 2i$  (où  $1 \leq i \leq k-1$ ), et  $j = 2i$  (où  $i \geq k$ ) dans la première somme de (4) (avec  $k$  remplacé par  $2k + \ell$ ).

Le terme

$$\psi(x) = \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \sum_{i=k}^{k+\lfloor(\ell-1)/2\rfloor} B_{2i} \binom{2k+\ell}{2i} x^{1-2i} - \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell \frac{B_{2k+\ell}(x) - B_{2k+\ell}}{x^{2k+\ell-1}}$$

vérifie  $\psi'(x) \ll_k x^{-2k}$  (où la constante implicite dépend de  $k$  et des  $\lambda_\ell$ ). On a ensuite

$$\varphi(x) = x \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell - \sum_{\ell=1}^k (k + \ell/2) \lambda_\ell + \sum_{i=1}^{k-1} B_{2i} \frac{\sum_{\ell=1}^k \binom{2k+\ell}{2i} \lambda_\ell}{x^{2i-1}} + \psi(x),$$

et on cherche les  $\lambda_\ell$  de sorte que

$$\sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell = 1 \quad (16)$$

$$\sum_{\ell=1}^k \binom{2k+\ell}{2i} \lambda_\ell = 0 \quad (1 \leq i \leq k-1). \quad (17)$$

Le déterminant de ce système de  $k$  équations linéaires à  $k$  inconnues est  $\Delta_k(2k)$ , où l'on a posé

$$\Delta_k(x) = \det \left( \binom{x+j}{2(i-1)} \right)_{1 \leq i, j \leq k}.$$

On a

$$\binom{x+j}{2(i-1)} - \binom{x+j-1}{2(i-1)} = \binom{x+j-1}{2i-3} = \frac{x+j-1}{2i-3} \binom{x+j-2}{2(i-2)} \quad (2 \leq i, j \leq k),$$

et cette différence est nulle pour  $i = 1$ . En retranchant la  $(j-1)^e$  colonne de  $\Delta_k(x)$  à sa  $j^e$  pour  $k \geq j \geq 2$ , on voit donc que

$$\Delta_k(x) = \frac{\prod_{j=2}^k (x+j-1)}{\prod_{i=2}^k (2i-3)} \Delta_{k-1}(x-1).$$

Comme  $\Delta_1(x) = 1$ , on en déduit par récurrence sur  $k$  que  $\Delta_k(x) \neq 0$  pour  $x \geq k$ , disons. En particulier  $\Delta_k(2k) \neq 0$ .

On peut donc choisir les  $\lambda_\ell$  tels que les relations (16) et (17) soient vérifiées. Nous aurons alors

$$\varphi(x) = x - c_k + \psi(x),$$

où  $c_k = \sum_{\ell=1}^k (k + \ell/2) \lambda_\ell$ . Comme  $\varphi(1) = 0$ , on en déduit que

$$x - 1 = \varphi(x) - \int_1^x \psi'(t) dt,$$

donc

$$\begin{aligned} xm_1(x) &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \varphi(x/n) - \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_1^{x/n} \psi'(t) dt \\ &= \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell (2k + \ell) (1 - 1/x)^{2k+\ell-1} - \int_1^x M(x/t) \psi'(t) dt \\ &\ll_k 1 + \int_1^x |M(x/t)| t^{-2k} dt \\ &= 1 + x^{1-2k} \int_1^x |M(t)| t^{2k-2} dt, \end{aligned}$$

ce qui démontre (15). □

On peut voir que les constantes  $C_k$  et  $D_k$  fournies par la démonstration de la proposition 8 sont  $O(6^{k^2})$ . D'autre part, quelques essais me conduisent à conjecturer que les valeurs suivantes sont admissibles dans la proposition 8 :

$k$	4	5	6	7	8
$C_k$	1,1	1,5	2,6	6,3	13,8
$D_k$	2,1	2,5	2,8	3,1	3,2

## 9 Sur un encadrement dû à von Mangoldt

Comme von Mangoldt l'a montré dans [12] (Hilfssatz 2, p.839), on peut adapter l'argumentation de Gram à une identité de départ autre que celle de Meissel, mais toujours obtenue par inversion de Möbius. Au lieu de  $\varphi(x) = [x \geq 1]$  comme au §2, prenons cette fois  $\varphi(x) = x[x \geq 1]$ . Nous aurons

$$\begin{aligned} S_1 \varphi(x) &= \sum_{n \leq x} x/n \\ &= xH(x), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{n \leq x} 1/n \\ &= \log x + \gamma + \frac{1/2 - \{x\}}{x} + \varepsilon_2(x), \end{aligned}$$

et

$$\varepsilon_2(x) = \int_x^\infty (\{t\} - 1/2) \frac{dt}{t^2}$$

d'après la formule sommatoire d'Euler et Maclaurin (cf. [2], proposition 1).

Par inversion de Möbius, on en déduit

$$\sum_{n \leq x} \mu(n)(x/n)H(x/n) = x \quad (x \geq 1),$$

autrement dit :

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} (\log(x/n) + \gamma + \frac{1/2 - \{x/n\}}{x/n} + \varepsilon_2(x/n)) = 1.$$

Par conséquent, on obtient

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n) = \int_1^x m(t) \frac{dt}{t} = 1 - \gamma m(x) - \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left( \frac{1/2 - \{x/n\}}{x/n} + \varepsilon_2(x/n) \right).$$

En utilisant les inégalités  $|m(x)| \leq 1$ ,  $|\varepsilon_2(x)| \leq 1/2x$  et  $|\mu(n)| \leq 1$ , on obtient que

$$\left| \gamma m(x) + \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left( \frac{1/2 - \{x/n\}}{x/n} + \varepsilon_2(x/n) \right) \right| \leq \gamma + 1,$$

d'où <sup>††</sup>

$$-\gamma \leq \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n) \leq 2 + \gamma. \quad (18)$$

Ainsi non seulement  $m(t)$  est bornée, mais c'est aussi le cas de l'intégrale  $\int_1^x m(t) dt/t$ .

Maintenant, de même que la proposition 3 du §5 donnait une majoration non triviale de  $|m(t)|$  directement en termes de  $|M(t)|$ , de même on peut donner une majoration non triviale de  $|-1 + \int_1^x m(t) dt/t|$  en termes de  $|M(t)|$  : c'est l'objet de la proposition 10 ci-dessous. La méthode est la même : au lieu de considérer comme au §5

$$\varphi_2(x) = \frac{2}{x} \int_0^x \left( \sum_{n \leq t} 1 \right) dt,$$

---

<sup>††</sup>. Von Mangoldt donne  $-3 - \gamma$  et  $3 + \gamma$  comme bornes de cet encadrement. On peut remplacer les bornes  $-\gamma$  et  $2 + \gamma$  de (18) par les valeurs optimales 0 et  $\sum_{n \leq 30} \frac{\mu(n)}{n} \log(30/n) = 1,00302 \dots$

on considère maintenant

$$\begin{aligned}
\beta_2(x) &= \frac{2}{x} \int_0^x \left( \sum_{n \leq t} t/n \right) dt \\
&= \sum_{n \leq x} (x/n - n/x) \\
&= x(\log x + \gamma - 1/2) + x\varepsilon_2(x) - \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{2x}.
\end{aligned}$$

Par inversion de Möbius on obtient

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left( (x/n) \log(x/n) + (\gamma - 1/2)x/n + (x/n)\varepsilon_2(x/n) - \frac{\{x/n\}^2 - \{x/n\}}{2x/n} \right) = x - 1/x \quad (x \geq 1). \quad (19)$$

La combinaison linéaire (19)+(1/2 - \gamma) \times (8) fournit alors

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left( (x/n) \log(x/n) - \varepsilon_3(x/n) \right) = x + 1 - 2\gamma + (2\gamma - 2)/x, \quad (20)$$

où

$$\varepsilon_3(x) = \gamma - 1/2 + x\varepsilon_2(x) + (\gamma - 1) \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{x}.$$

Observons que  $\varepsilon_3(1) = 0$  et que la fonction  $\varepsilon_3$  est continûment dérivable sauf aux points entiers, avec

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3'(x) &= x\varepsilon_2'(x) + \varepsilon_2(x) + (\gamma - 1) \frac{(2\{x\} - 1)x - \{x\}^2 + \{x\}}{x^2} \\
&= H(x) - \log x - \gamma + (\gamma - 1) \frac{(2\{x\} - 1)x - \{x\}^2 + \{x\}}{x^2} \quad (x \geq 1, x \notin \mathbb{N}).
\end{aligned} \quad (21)$$

**Proposition 9** On a

$$|x\varepsilon_3'(x)| \leq 1 \quad (x \geq 1, x \notin \mathbb{N}).$$

**Démonstration**

Pour  $x \geq 1, x \notin \mathbb{N}$ , on a d'après (21)

$$x\varepsilon_3'(x) = xH(x) - x \log x - \gamma x + (2\gamma - 2)(\{x\} - 1/2) - (\gamma - 1) \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{x},$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x\varepsilon_3'(x)) &= H(x) - \log x - 1 - \gamma + (2\gamma - 2) - (\gamma - 1) \frac{(2\{x\} - 1)x - \{x\}^2 + \{x\}}{x^2} \\
&\leq -\gamma + 2\gamma - 2 + 1 - \gamma \quad (\text{car } H(x) \leq \log x + 1 \text{ et } (2\{x\} - 1)x - \{x\}^2 + \{x\} \leq x \leq x^2) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$n\varepsilon_3'(n) \leq 1 \quad (22)$$

$$(n + 1 - 0)\varepsilon_3'(n + 1 - 0) \geq -1. \quad (23)$$

L'inégalité (22) se récrit

$$H(n) \leq \log n + \gamma + \frac{\gamma}{n},$$

ce qui résulte de

$$\begin{aligned} H(n) - \log n - \gamma &= \frac{1}{2n} + \int_n^\infty (\{t\} - 1/2) \frac{dt}{t^2} \\ &< \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Enfin l'inégalité (23) se récrit

$$H(n) \geq \log(n+1) + \frac{\gamma n}{n+1},$$

soit encore

$$\varepsilon_2(n) \geq \log(1 + 1/n) - \frac{\gamma}{n+1} - \frac{1}{2n}.$$

Cela résulte des inégalités suivantes :

- $\varepsilon_2(n) > -1/12n^2$  (cf. [5], formule (6.66)) ;
- $\log(1 + 1/n) \leq 1/n$  ;
- $(\gamma - \frac{1}{2})n^2 - 7n/12 - 1/12 \geq 0$  pour  $n \geq 8$ ,  
et d'une comparaison directe pour  $1 \leq n \leq 7$ .

□

**Proposition 10** *Pour  $x \geq 1$ , on a*

$$\left| -1 + \int_1^x m(t) \frac{dt}{t} \right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t}.$$

**Démonstration**

L'identité (20) se récrit

$$\begin{aligned} \int_1^x m(t) \frac{dt}{t} &= \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n) \\ &= 1 + \frac{1-2\gamma}{x} + \frac{2\gamma-2}{x^2} + \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \mu(n) \varepsilon_3(x/n). \end{aligned}$$

On a d'abord

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{1-2\gamma}{x} + \frac{2\gamma-2}{x^2} \leq 0 \quad (x \geq 1),$$

puis

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \mu(n) \varepsilon_3(x/n) \right| &= \left| \int_1^x M(x/t) \varepsilon'_3(t) dt \right| \\ &\leq \int_1^x |M(x/t)| \frac{dt}{t} \quad (\text{d'après la proposition 9}) \\ &= \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

□

On pourrait généraliser la proposition 10 en une analogue de la proposition 8, et d'autre part considérer la moyenne logarithmique de Riesz d'ordre  $k$  de la fonction  $\mu(n)/n$  :

$$\mathcal{R}_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log^k(x/n),$$

dont le terme principal est  $P_k(\log x)/k!$ , où  $P_k$  est le  $k^e$  polynôme d'Appell de la fonction  $1/\zeta(s)$  en  $s = 1$  (voir [2], §2).

## 10 Un exemple à propos du lemme d'Axer

Dans la version de ces remarques soumise pour publication à l'Institut Steklov, je posais une question concernant le lemme d'Axer. Afin de la formuler définissons, pour  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ , la quantité  $c(\alpha)$  comme la borne inférieure des  $\beta > 0$  tels que l'énoncé suivant soit vrai.

*Soit  $f$  une fonction arithmétique,*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n \leq x} |f(n)|.$$

*On suppose que*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |F(x)/x| \leq \alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} G(x)/x \leq 1.$$

*Alors*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n) \{x/n\}| \leq \beta.$$

La proposition 5 entraîne que  $c(\alpha) \leq \alpha(6 + 2 \log(1/\alpha))$ .

**Question 1** *A-t-on*

$$c(\alpha) = o(\alpha \log(1/\alpha)) \quad (\alpha \rightarrow 0)?$$

L'arbitre anonyme sollicité par l'Institut Steklov a montré que la réponse à cette question est négative grâce à la construction suivante, que je présente en décomposant son argumentation sous la forme de plusieurs propositions.

**Proposition 11** *Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha^{-1}$  soit un entier supérieur ou égal à 2. Alors on a*

- 1)  $\alpha^{-4-2j} > \alpha^{-4-2j}/2 + 1 \quad (j \geq 0)$
- 2)  $\lfloor \alpha^{-4-2(j+1)}/k \rfloor > \lfloor \alpha^{-4-2j}/k' \rfloor + 1 \quad (j \geq 0; 2 \leq k, k' \leq \alpha^{-1})$
- 3)  $\lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor > \lfloor \alpha^{-4-2j}/(k+1) \rfloor + 1 \quad (j \geq 0; 2 \leq k \leq \alpha^{-1} - 1).$

**Démonstration**

Pour 1) on a en fait  $\alpha^{-4-2j}/2 \geq 8 > 1$ . Pour 2) on a

$$\lfloor \alpha^{-4-2(j+1)}/k \rfloor \geq \lfloor \alpha^{-4-2(j+1)}/(\alpha^{-1}) \rfloor = \alpha^{-5-2j} > \alpha^{-4-2j} > \alpha^{-4-2j}/2 + 1 \geq \lfloor \alpha^{-4-2j}/k' \rfloor + 1.$$



Enfin, pour 3), il suffit de voir que

$$\alpha^{-4-2j}/(k(k+1)) \geq 2 \quad (j \geq 0, 2 \leq k \leq \alpha^{-1} - 1),$$

et cela résulte de

$$\alpha^{-4}/(\alpha^{-1}(\alpha^{-1} - 1)) \geq 2,$$

pour  $\alpha^{-1} \geq 2$ . □

**Proposition 12** *Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha^{-1}$  soit un entier supérieur ou égal à 2. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \{k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq \alpha^{-1}\} &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (h, j, k) &\mapsto \lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor + h \end{aligned}$$

*est injective.*

### Démonstration

La proposition 11 montre que cette application est strictement croissante si l'on munit l'ensemble de départ de l'ordre lexicographique sur les triplets  $(j, k^{-1}, h)$ . □

La proposition 12 nous permet de définir, pour tout  $\alpha$  inverse d'entier supérieur ou égal à 2, une fonction arithmétique  $f_\alpha$  par la formule

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} (-1)^h \alpha \lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor & \text{si } n = \lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor + h \quad (j \geq 0; h = 0, 1; 2 \leq k \leq \alpha^{-1}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En désignant par  $F_\alpha$  la fonction sommatoire de  $f_\alpha$ , on a pour  $N \in \mathbb{N}^*$

$$F_\alpha(N) = \begin{cases} \alpha N & \text{si } N \text{ est de la forme } \lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor \quad (j \geq 0; 2 \leq k \leq \alpha^{-1}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (24)$$

En particulier on a

$$\limsup |F_\alpha(x)/x| = \alpha.$$

Posons ensuite

$$G_\alpha(x) = \sum_{n \leq x} |f_\alpha(n)| \quad (x > 0).$$

**Proposition 13** *Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha^{-1}$  soit un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout  $x > 0$ , on a*

$$G_\alpha(x) \leq (x+1)(2/e + 3\alpha).$$

### Démonstration

Au vu de la définition de la fonction arithmétique  $f_\alpha$ , il suffit de considérer le cas de  $x = N = \lfloor \alpha^{-4-2J}/K \rfloor + h_0$ , où  $J \in \mathbb{N}$ ,  $h_0 \in \{0, 1\}$  et  $2 \leq K \leq \alpha^{-1}$ .

On a

$$G_\alpha(N) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=2}^{\alpha^{-1}} 2\alpha \lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor + \sum_{k=K+1}^{\alpha^{-1}} 2\alpha \lfloor \alpha^{-4-2J}/k \rfloor + \alpha \lfloor \alpha^{-4-2J}/K \rfloor (h_0 + 1).$$

Le dernier terme est  $\leq 2\alpha N$ . Pour le deuxième, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=K+1}^{\alpha^{-1}} 2\alpha \lfloor \alpha^{-4-2J}/k \rfloor &\leq 2\alpha^{-3-2J} \sum_{k=K+1}^{\alpha^{-1}} 1/k \\
&\leq 2\alpha^{-3-2J} \int_K^{\alpha^{-1}} \frac{dt}{t} \\
&= 2\alpha^{-3-2J} \log(1/K\alpha) \\
&= 2(\alpha^{-4-2J}/K) \cdot K\alpha \log(1/K\alpha) \\
&\leq 2(N+1)/e.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=2}^{\alpha^{-1}} 2\alpha \lfloor \alpha^{-4-2j}/k \rfloor &\leq 2\alpha^{-3} \sum_{j=0}^{J-1} \alpha^{-2j} \cdot \sum_{k=2}^{\alpha^{-1}} 1/k \\
&\leq 2\alpha^{-3} \cdot \frac{\alpha^{-2J} - 1}{\alpha^{-2} - 1} \cdot \log(1/\alpha) \\
&\leq \frac{8}{3} \cdot \alpha \cdot (\alpha^{-4-2J} \cdot \alpha) \cdot \alpha \log(1/\alpha) \\
&\leq \frac{8}{3e} \cdot \alpha \cdot (\alpha^{-4-2J}/K) \\
&\leq \frac{8}{3e} \alpha(N+1).
\end{aligned}$$

En réunissant ces trois majorations, on obtient bien que  $G_\alpha(N) \leq (N+1)(2/e + 3\alpha)$ . □

En particulier, si  $\alpha^{-1} \geq 12$ , on déduit de la proposition 13 que  $\limsup_{x \rightarrow \infty} G_\alpha(x)/x \leq 1$ .

**Proposition 14** *Soit  $J \in \mathbb{N}$  et  $N = \alpha^{-4-2J}$ . On a*

$$0 < \sum_{\alpha N \leq n \leq N} f_\alpha(n)/n < 1/N\alpha.$$

### Démonstration

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha N \leq n \leq N} f_\alpha(n)/n &= \sum_{k=2}^{\alpha^{-1}} \left( \frac{\alpha \lfloor N/k \rfloor}{\lfloor N/k \rfloor} - \frac{\alpha \lfloor N/k \rfloor}{\lfloor N/k \rfloor + 1} \right) \\
&= \alpha \sum_{k=2}^{\alpha^{-1}} \frac{1}{\lfloor N/k \rfloor + 1} \\
&< \alpha N^{-1} \sum_{k=2}^{\alpha^{-1}} k \\
&\leq 1/\alpha N.
\end{aligned}$$
□

Posons enfin

$$H_\alpha(x) = \sum_{n \leq x} f_\alpha(n) \{x/n\}.$$

**Proposition 15** *Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha^{-1}$  soit un entier supérieur ou égal à 2. On a*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |H_\alpha(x)/x| \geq \alpha \log(1/\alpha) + O(\alpha).$$

**Démonstration**

Soit  $J \in \mathbb{N}$  et  $N = \alpha^{-4-2J}$ . On a

$$H_\alpha(N) = \sum_{n \leq N} f_\alpha(n) (N/n - \lfloor N/n \rfloor).$$

D'après le principe de l'hyperbole, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} f_\alpha(n) \lfloor N/n \rfloor &= \sum_{n < \alpha N} f_\alpha(n) \lfloor N/n \rfloor + \sum_{k \leq \alpha^{-1}} F_\alpha(N/k) - F_\alpha(\alpha N - 0) \alpha^{-1} \\ &= \sum_{n < \alpha N} f_\alpha(n) \lfloor N/n \rfloor + \alpha \sum_{2 \leq k \leq \alpha^{-1}} \lfloor N/k \rfloor \quad (\text{d'après (24)}) \\ &= \sum_{n < \alpha N} f_\alpha(n) \lfloor N/n \rfloor + \alpha N (\log(1/\alpha) + O(1)) + O(1). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} H_\alpha(N) &= \sum_{n < \alpha N} f_\alpha(n) \{N/n\} + \sum_{\alpha N \leq n \leq N} f_\alpha(n) N/n - \alpha N (\log(1/\alpha) + O(1)) + O(1) \\ &= -\alpha N (\log(1/\alpha) + O(1)) + O(1/\alpha) \quad (\text{d'après les propositions 13 et 14}). \end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en faisant tendre  $J$  vers l'infini.  $\square$

Finalement, la construction présentée montre que  $c(\alpha) \geq \alpha \log(1/\alpha) + O(\alpha)$  si  $\alpha^{-1}$  est un nombre entier supérieur ou égal à 12. La réponse à la question 1 est bien négative.

## 11 Questions ouvertes

La principale question issue de ces remarques est celle de la détermination des constantes optimales  $C_k$  (et dans une moindre mesure  $D_k$ ) de la proposition 8. Comme première question concrète, je propose la suivante.

**Question 2** *A-t-on*

$$|m_1(x)| \leq x^{-3} \int_1^x t |M(t)| dt + O(1/x) \quad (x \geq 1)?$$

Autrement dit, peut-on remplacer la constante 1,1 du tableau final du §8 par 1?

J'indique aussi deux questions qui apparaissent naturellement à propos du lemme d'Axer (cf. §§6 et 10 ci-dessus). D'abord :

**Question 3** *Quel est le comportement asymptotique de  $c(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0 ?*

Enfin soit  $c_1(\alpha)$  la quantité définie comme  $c(\alpha)$ , mais en remplaçant la condition

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} G(x)/x \leq 1$$

par

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f(n)| \leq 1.$$

**Question 4** *A-t-on*

$$c_1(\alpha) = o(\alpha \log(1/\alpha)) \quad (\alpha \rightarrow 0)?$$

#### REMERCIEMENTS

Je remercie le département de mathématiques de l'University College de Londres, et particulièrement Y. Petridis, pour d'excellentes conditions de travail lors de la préparation de cet article en juillet 2011. Je remercie également l'arbitre sollicité par l'Institut Steklov (et qui a tenu à rester anonyme), pour l'exemple présenté au §10 concernant le lemme d'Axer.

## Références

- [1] A. AXER – « Beitrag zur Kenntniss der zahlentheoretischen Funktionen  $\mu(n)$  und  $\lambda(n)$  », *Prace mat.-fyz.* **21** (1910), p. 65–95.
- [2] M. BALAZARD – « Sur la fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt généralisée », *Arch. Math. (Basel)* **90** (2008), p. 31–38.
- [3] M. BALAZARD – « Elementary remarks on Möbius' function », *Proc. Steklov Inst. Math.* **276** (2012), p. 33–39.
- [4] L. E. DICKSON – *History of the theory of numbers. Vol. I : Divisibility and primality*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
- [5] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH & O. PATASHNIK – *Concrete mathematics*, second éd., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [6] J. P. GRAM – « Undersøgelser angaaende Maengden af Primal under en given Graense (avec un résumé en français) », *Kjobenhavn. Skrift. (6) II.* (1884), p. 185–308.
- [7] G. H. HARDY – *Divergent series*, Oxford University Press, London, 1949.
- [8] L. KRONECKER – « Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes », *C.R.A.S. Paris* **103** (1887), p. 980–987.
- [9] E. LANDAU – « Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren *Hardy* und *Axer* », *Prace mat.-fyz.* **21** (1910), p. 97–177.
- [10] J. LEE – « Integrals of Bernoulli polynomials and series of zeta function », *Commun. Korean Math. Soc.* **14** (1999), no. 4, p. 707–716.
- [11] R. A. MACLEOD – « A curious identity for the Möbius function », *Utilitas Math.* **46** (1994), p. 91–95.

- [12] H. V. MANGOLDT – « Beweis der Gleichung  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$  », *Sitz. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* (1897), p. 835–852.
- [13] E. MEISSEL – « Observationes quaedam in theoria numerorum », *J. reine angew. Math.* **48** (1854), p. 301–316.
- [14] F. MERTENS – « Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie », *J. reine angew. Math.* **77** (1873), p. 289–338.
- [15] A. F. MÖBIUS – « Über eine besondere Art der Umkehrung der Reihen », *J. reine angew. Math.* **9** (1832), p. 105–123.

Michel BALAZARD  
 Institut de Mathématiques de Luminy, FRE 3529  
 CNRS, Université d'Aix-Marseille  
 Campus de Luminy, Case 907  
 13288 Marseille Cedex 9  
 FRANCE  
 Adresse électronique : [balazard@iml.univ-mrs.fr](mailto:balazard@iml.univ-mrs.fr)